将其代入曲线 C_2 整理可得：$t^2-3\sqrt{2}t+4=0$，

设 A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=3\sqrt{2}$，$t_1t_2=4$.

所以 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-4\times4}=\sqrt{2}$.

考点三：综合应用

例3. 在直角坐标系 xOy 中，直线 l 过 $M(2,0)$，倾斜角为 $\alpha(\alpha\neq0)$．以 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$.

（1）求直线 l 的参数方程和曲线 C 的直角坐标方程；

（2）已知直线 l 与曲线 C 交于 A、B 两点，且 $|MA|=2|MB|$，求直线 l 的斜率 k.

解析：（1）直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），

由 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$，得 $\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$，∴曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4x$.

（2）把 $x=2+t\cos\alpha$、$y=t\sin\alpha$ 代入 $y^2=4x$，得 $(\sin^2\alpha)t^2-(4\cos\alpha)t-8=0$.

设 A，B 两点对应的参数分别为 t_1 与 t_2，则 $t_1+t_2=\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$……(1)，$t_1t_2=-\dfrac{8}{\sin^2\alpha}$……(2)

易知 t_1 与 t_2 异号，又∵ $|MA|=2|MB|$ ∴ $t_1=-2t_2$……(3)，将(3)代入(1)(2)式，消去 t_1 得：$-t_2=\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$……(4)，$-t_2{}^2=-\dfrac{8}{\sin^2\alpha}$(5)，将(4)式代入(5)式得：$-2\times\dfrac{16\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}=-\dfrac{8}{\sin^2\alpha}$.

整理得：$\tan\alpha=\pm2$，即 $k=\pm2$.

【点评】本题主要考查直线参数方程、极坐标方程转化为直角坐标方程、韦达定理、消参法、三角函数，综合性强.

变式训练3：将圆 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）上的每一个点的横坐标保持不变，纵坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$，得到曲线 C.

（1）求曲线 C 的普通方程；

（2）设 A，B 是曲线 C 上的任意两点，且 $OA\perp OB$，求 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}$ 的值.

解析：（1）设 (x_1,y_1) 为圆上的任意一点，在已知的变换下变为 C 上的点 (x,y)，则有 $\begin{cases}x=x_1,\\ y=\dfrac{1}{2}y_1.\end{cases}$ 因为 $\begin{cases}x_1=2\cos\theta,\\ y_1=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），所以 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），所以 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，在极坐标系中，曲线 C 的普通方程化为极坐标方程得 $\dfrac{\rho^2\cos^2\alpha}{4}+\rho^2\sin^2\theta=1$. 设 $A(\rho_1,\theta)$，$B(\rho_2,\theta+\dfrac{\pi}{2})$，则 $|OA|=\rho_1$，$|OB|=\rho_2$，则 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{\rho_2^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{4}+\sin^2\theta+\dfrac{\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})}{4}+\sin^2(\theta+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{5}{4}$.

变式训练4：在直角坐标系 xOy 中，圆 C_1：$(x-2)^2+(y-4)^2=20$.，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，C_2：$\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in R)$.

（1）求 C_1 的极坐标方程和 C_2 的平面直角坐标系方程；

（2）若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{6}(\rho\in R)$，设 C_2 与 C_1 的交点为 O、M，C_3 与 C_1 的交点为 O、N，求 ΔOMN 的面积.

解析：（1）因为圆 C_1 的普通方程为 $y^2+y^2-4x-8y=0$，把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入方程得 $\rho^2-4\rho\cos\theta-8\rho\sin\theta=0$，所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+8\sin\theta$，$C_2$ 的平面直角坐标系方程为 $y=\sqrt{3}x$.

（2）分别将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 代入 $\rho=4\cos\theta+8\sin\theta$，得 $\rho_1=2+4\sqrt{3}$，$\rho_2=4+2\sqrt{3}$，则 ΔOMN 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times(2+4\sqrt{3})\times(4+2\sqrt{3})\times\sin(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6})=8+5\sqrt{3}$.

责任编辑　**徐国坚**